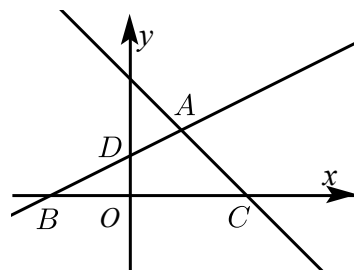


第2讲 一次函数与面积综合（练习）

一、面积之“底高公式”

1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴交于点 C ，与直线 AD 交于点 $A\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ，点 D 的坐标为 $(0, 1)$ ，直线 AD 与 x 轴交于点 B 。



- (1) 求直线 AD 的解析式。
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ 。
(2) $\frac{25}{6}$ 。

【解析】 (1) 设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b$ ，

将 $A\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ， $D(0, 1)$ 代入得：

$$\begin{cases} \frac{4}{3}k + b = \frac{5}{3} \\ 1 = b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

故直线 AD 的解析式为： $y = \frac{1}{2}x + 1$ 。

(2) $\because$ 直线 AD 的解析式为： $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，

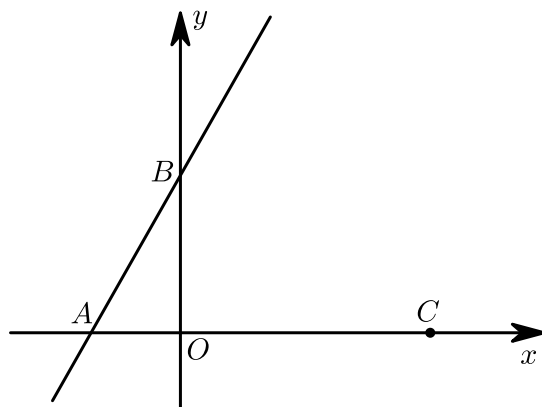
$\therefore$ 当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，即 $B(-2, 0)$ ，

$\therefore BC = 5$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$ 。

【标注】【知识点】一次函数与面积

2. 如图所示，直线 $y = kx + b$ 与两坐标轴分别交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 两点。



(1) 求直线 AB 的函数解析式.

(2) 过点 $C(3, 0)$ 的直线 l 与直线 AB 相交于点 P , 若 $\triangle APC$ 的面积等于6, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = 2x + 2$.

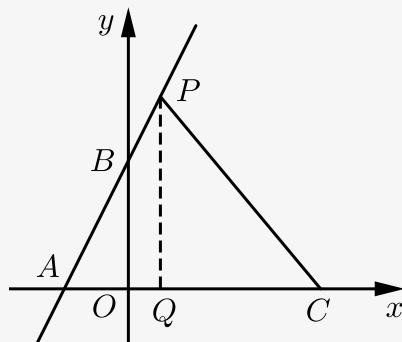
(2) $P\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 或 $P\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$.

【解析】 (1) 将 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$ 的坐标代入解析式 $y = kx + b$ 得,

$$\begin{cases} 0 = -k + b \\ 2 = b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 2 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = 2x + 2$.

(2) 设 $P(x, 2x + 2)$, 过点 P 作 $PQ \perp AC$ 于点 Q ,



$$\therefore S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PQ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |x_C - x_A| \cdot |y_P|$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times |2x + 2|$$

$$= 4|x + 1|$$

$$\because S_{\triangle APC} = 6,$$

$$\therefore 4|x + 1| = 6,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, 3\right) \text{ 或 } P\left(-\frac{5}{2}, -3\right).$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + 2$ ($k \neq 0$) 与 x 轴的交点为 A , 与 y 轴的交点为 B , 且 $S_{\triangle AOB} = 2$, 则 k 的值为 _____ .

【答案】 ± 1

【解析】 $y = kx + 2$ 与 x 轴交于 A 点, 与 y 轴交于 B 点,

$$\text{令 } x = 0, y = 2, B(0, 2),$$

$$\text{令 } y = 0, x = -\frac{2}{k}, A\left(-\frac{2}{k}, 0\right),$$

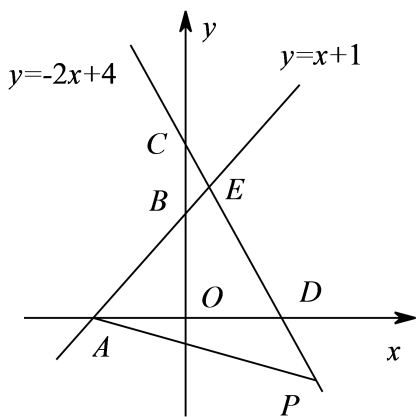
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \left| -\frac{2}{k} \right| = 2,$$

$$\therefore |k| = 1,$$

$$\therefore k = \pm 1.$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

4. 如图, 直线 $y = x + 1$ 与 x , y 轴交于点 A , B , 直线 $y = -2x + 4$ 与 x , y 轴交于点 D , C , 这两条直线交于点 E .



(1) 求 E 点坐标.

(2) 若 P 为直线 CD 上一点, 当 $\triangle ADP$ 的面积为9时, 求 P 的坐标.

【答案】(1) $(1, 2)$.

(2) $(-1, 6)$ 或 $(5, -6)$.

【解析】(1) 将 $y = x + 1$ 代入 $y = -2x + 4$,

$$\text{得: } x + 1 = -2x + 4, \text{ 解得: } x = 1,$$

将 $x = 1$ 代入 $y = x + 1$ 得： $y = 2$.

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, 2)$.

(2) 把 $y = 0$ 代入 $y = x + 1$ 得： $x + 1 = 0$, 解得 $x = -1$,

$\therefore A(-1, 0)$.

把 $y = 0$ 代入 $y = -2x + 4$ 得： $-2x + 4 = 0$, 解得 $x = 2$,

$\therefore A(2, 0)$.

$\therefore AD = 3$.

$\therefore \triangle ADP$ 的面积为9 ,

$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times |y_P| = 9$, 解得： $|y_P| = 6$.

$\therefore y_P = 6$ 或 $y_P = -6$.

将 $y = 6$ 代入 $y = -2x + 4$ 得： $-2x + 4 = 6$, 解得： $x = -1$,

$\therefore P(-1, 6)$.

将 $y = -6$ 代入 $y = -2x + 4$ 得： $-2x + 4 = -6$, 解得： $x = 5$,

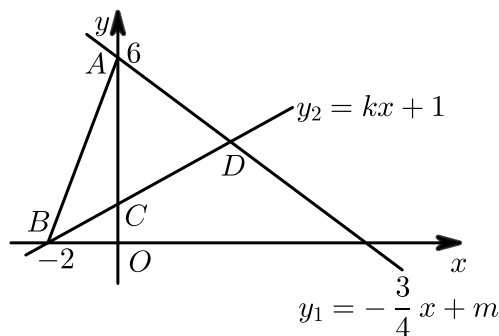
$\therefore P(5, -6)$.

综上所述 , 点 P 的坐标为 $(-1, 6)$ 或 $(5, -6)$.

【标注】【知识点】一次函数与面积

二、 面积之割补法

5. 如图 , 直线 $l_1 : y_1 = -\frac{3}{4}x + m$ 与 y 轴交于点 $A(0, 6)$, 直线 $l_2 : y_2 = kx + 1$ 分别与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 两条直线相交于点 D , 连接 AB .



- (1) 求两直线交点 D 的坐标 .
(2) 求 $\triangle ABD$ 的面积 .
(3) 根据图象直接写出 $y_1 > y_2$ 时自变量 x 的取值范围 .

【答案】 (1) $(4, 3)$.

(2) 15 .

(3) $x < 4$.

【解析】(1) 将 $A(0,6)$ 代入 $y_1 = -\frac{3}{4}x + m$ 得 , $m = 6$;

将 $B(-2,0)$ 代入 $y_2 = kx + 1$ 得 , $k = \frac{1}{2}$

组成方程组得 $\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$,

故 D 点坐标为 $(4,3)$.

(2) 由 $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$ 可知 ,

C 点坐标为 $(0,1)$,

$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$

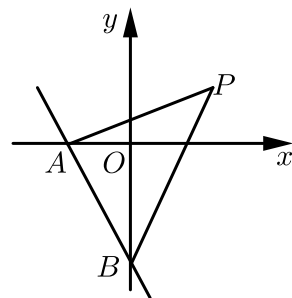
$= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4$

$= 15$.

(3) 由图可知 , 在 D 点左侧时 , $y_1 > y_2$, 即 $x < 4$ 时 , $y_1 > y_2$.

【标注】【知识点】一次函数与面积

6. 如图 , 在平面直角坐标系中 , 点 P 的坐标为 $(3,2)$, 若直线 $y = -2x - 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点 , 连接 PA 、 PB .



(1) 求点 A 、点 B 的坐标 .

(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积 .

【答案】(1) $A(-2,0)$, $B(0,-4)$.

(2) $S_{\triangle PAB} = 12$.

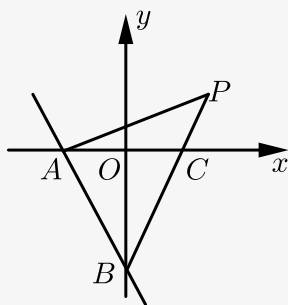
【解析】(1) $\because$ 直线 $y = -2x - 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点 ,

令 $y = 0$, 即 $-2x - 4 = 0$, 解得 $x = -2$,

令 $x = 0$, 即 $y = -4$,

$$\therefore A(-2, 0), B(0, -4).$$

(2) 设直线 PB 为 $y = kx + b$,



$$\text{由题意得, } \begin{cases} 3k + b = 2 \\ b = -4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 2 \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } PB \text{ 为 } y = 2x - 4,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (2, 0),$$

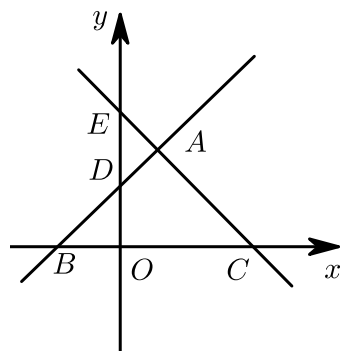
$$\therefore AC = 4, OB = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAC} + S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 12.$$

【标注】【知识点】一次函数与一元一次方程

【能力】推理论证能力

7. 直线 $l_1: y = x + 2$ 和直线 $l_2: y = -x + 4$ 相交于点 A , 分别与 x 轴相交于点 B 和点 C , 与 y 轴相交于点 D 和点 E .



(1) 写出 B 、 C 、 D 的坐标.

(2) 求直线 l_1 与直线 l_2 交点 A 的坐标.

(3) 求四边形 $ADOC$ 的面积.

【答案】(1) $B(-2, 0)$, $C(4, 0)$, $D(0, 2)$.

(2) $A(1, 3)$.

(3) 7.

【解析】(1) 对于直线 $y = x + 2$,

令 $y = 0$ 得 $0 = x + 2$, $\therefore x = -2$ 即 $B(-2, 0)$,

令 $x = 0$ 得 $y = 2$, 即 $D(0, 2)$,

对于直线 $y = -x + 4$,

令 $y = 0$ 得 $0 = -x + 4$, $\therefore x = 4$, 即 $C(4, 0)$.

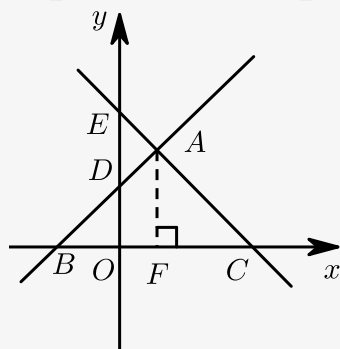
(2) 由
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$\therefore A(1, 3)$.

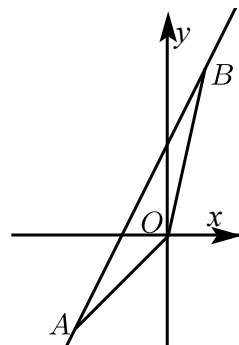
(3) 过 A 点作 $AF \perp x$ 轴,

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ADOC} &= S_{\text{梯形}DOFA} + S_{\triangle AFC} \\ &= \frac{1}{2}(DO + AF) \cdot OF + \frac{1}{2}FC \cdot AF \\ &= \frac{1}{2} \times (2 + 3) \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 7. \end{aligned}$$



【标注】【知识点】一次函数与面积

8. 如图, 直线 $y = kx + 5$ 经过点 $B(3, 9)$ 和 $A(-6, m)$.



(1) 求 k, m 的值.

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】(1) k 的值为 $\frac{4}{3}$, m 的值为 -3 .

(2) $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{45}{2}$.

【解析】(1) 把点 $B(3, 9)$ 代入 $y = kx + 5$ 得：

$$3k + 5 = 9,$$

$$\text{解得：} k = \frac{4}{3},$$

$$\text{即直线的解析式为：} y = \frac{4}{3}x + 5,$$

$$\text{把点} A(-6, m) \text{代入} y = \frac{4}{3}x + 5 \text{得：}$$

$$m = \frac{4}{3} \times (-6) + 5 = -8 + 5 = -3,$$

$$\text{即} k \text{的值为} \frac{4}{3}, m \text{的值为} -3.$$

(2) 设直线 AB 与 x 轴交于点 C ，如下图所示：

$$\text{把} y = 0 \text{代入} y = \frac{4}{3}x + 5 \text{得：}$$

$$\frac{4}{3}x + 5 = 0,$$

$$x = -\frac{15}{4},$$

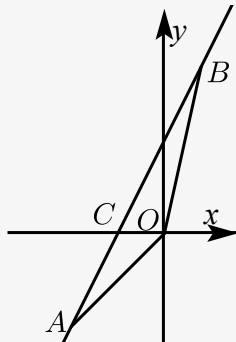
$$\text{即点} C(-\frac{15}{4}, 0),$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times 9 = \frac{135}{8},$$

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times 3 = \frac{45}{8},$$

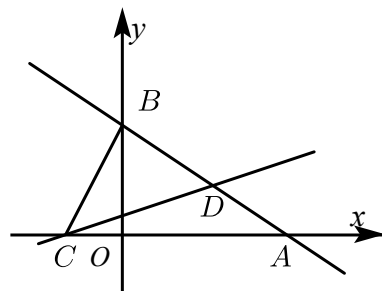
$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = \frac{135}{8} + \frac{45}{8} = \frac{45}{2}.$$

$$\text{即} \triangle AOB \text{的面积为} \frac{45}{2}.$$



【标注】【知识点】一次函数与面积

9. 如图，直线 $l_1: y_1 = -\frac{2}{3}x + b$ 过点 $A(6, 0)$ ，交 y 轴于点 B ，直线 $l_2: y_2 = \frac{1}{3}x + 1$ 与 x 轴交于点 C ，两直线 l_1, l_2 相交于点 D ，连接 BC 。



(1) 求直线 l_1 的解析式和点 D 的坐标

(2) $\triangle BCD$ 的面积

【答案】(1) $l_1: y = -\frac{2}{3}x + 4$, $D(3, 2)$.

(2) 9.

【解析】(1) 略.

(2) 方法一：(补)：大减小

能计算出 $C(-3,0)$ 、 $B(0,4)$ 、 $D(3,2)$ 、 $A(6,0)$ ，

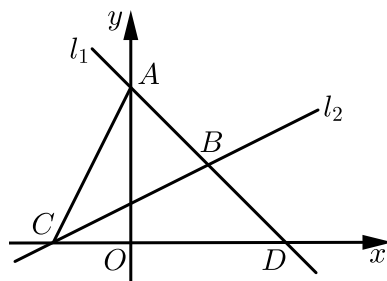
$$\begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= S_{\triangle BCA} - S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times |x_A - x_C| \times |y_B| - \frac{1}{2} \times |x_A - x_C| \times |y_D| \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 4 - \frac{1}{2} \times 9 \times 2 = 9 \end{aligned}$$

方法二：(割)：铅垂法

设 CD 交 y 轴于 E ，可计算 $E(0,1)$

【标注】【知识点】一次函数与面积

10. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象为直线 l_1 ，经过 $A(0,4)$ 和 $D(4,0)$ 两点；一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象为直线 l_2 与 x 轴交于点 C ；两直线 l_1 ， l_2 相交于点 B 。



- (1) 求 k 、 b 的值。
(2) 求点 B 的坐标。
(3) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】(1) $\begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases}$ 。

(2) 点 B 的坐标为 $(2, 2)$ 。

(3) 6。

【解析】(1) 把 $A(0,4)$ 和 $D(4,0)$ 分别代入 $y = kx + b$ 得 $\begin{cases} b = 4 \\ 4k + b = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases}。$$

(2) 解方程组 $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，

所以点 B 的坐标为 $(2, 2)$ 。

(3) 当 $y = 0$ 时， $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ ，解得 $x = -2$ ，则 C 点坐标为 $(-2, 0)$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以} \triangle ABC \text{的面积} &= S_{\triangle ACD} - S_{\triangle BCD} \\ &= \frac{1}{2} \times (4 + 2) \times 4 - \frac{1}{2} \times (4 + 2) \times 2 \end{aligned}$$

$$= 6 .$$

【标注】【知识点】一次函数与面积